Α.Μ.	ΕΠΙΘΕΤΟ	ΟΝΟΜΑ	ΕΤΟΣ ΕΓΓΡΑΦΗΣ

Απειροστικός Λογισμός Ι, 9/2/2017, Α. Τόλιας

Θέμα 1. Δίνονται δύο υποσύνολα A, B του $\mathbb{R}$ με $\sup A = -3$ και $\inf B = 5$. Να δείξετε ότι:
(α) **[0.2 μον.]** Για κάθε $x \in A$ και κάθε $y \in B$ ισχύει $x - y \leq -8$.
(β) **[0.8 μον.]** Αν $\delta > 0$ τότε υπάρχουν $a \in A$ και $\beta \in B$ με $\beta - a - \delta < 8$.

Θέμα 2. (α) **[1 μον.]** Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια συγκλίνουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών. Να δείξετε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη και ότι είναι βασική ακολουθία (ακολουθία Cauchy).
(β) **[1 μον.]** Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών και a, x δύο πραγματικοί αριθμοί ώστε $a_n \geq x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_n \to a$. Να δείξετε ότι $a \geq x$.
(γ) **[0.8 μον.]** Δίνεται η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $x_1 = 1$ και $x_{n+1} = x_n - \sin x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Να δείξετε ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα και να υπολογίσετε το όριό της. [Υπόδειξη: Να βρείτε αρχικά τη μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = x - \sin x$ σε κατάλληλο διάστημα.]
(δ) **[1.2 μον.]** Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες να το υπολογίσετε το όριό της (αν υπάρχει) ή να δείξετε ότι δεν υπάρχει

$$a_n = \sqrt[n]{6^n + n \cdot 5^n + 10n^3}, \quad \beta_n = \log(a_n), \quad \gamma_n = \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{2n} + \frac{\cos n}{n}, \quad \delta_n = \cos(\frac{3n\pi}{2}).$$

Θέμα 3. (α) **[1 μον.]** Έστω $f : [a, \beta] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Να δείξετε ότι η f είναι φραγμένη και ότι υπάρχει $x_0 \in [a, \beta]$ ώστε $f(x_0) \geq f(t)$ για κάθε $t \in [a, \beta]$.
(β) **[1 μον.]** Έστω $f, g : [a, \beta] \to \mathbb{R}$ δύο συνεχείς συναρτήσεις με $\max\{f(t) : t \in [a, \beta]\} = \max\{g(t) : t \in [a, \beta]\}$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [a, \beta]$ ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

Θέμα 4. **[1 μον.]** Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $e^{4x} = 1 + f(x)\sin x$ για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Να υπολογίσετε την τιμή $f(0)$ και να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, υπολογίζοντας την παράγωγο της σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού.

Θέμα 5. **[1 μον.]** Δίνεται ότι η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, ισχύει $f(0) = 0$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με τη συνάρτηση f' να είναι γνησίως αύξουσα. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα.

Θέμα 6. **[1 μον.]** Να συγκριθούν οι αριθμοί 2017^{2017} και 2016^{2018}.

Θέμα 7. **[1.5 μον.]** Για καθένα από τα παρακάτω όρια να το υπολογίσετε (αν υπάρχει) ή να δείξετε ότι δεν υπάρχει

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sin(2x)}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \sin(x^2), \qquad \lim_{x\to 1^+} (x-1)^{\log x}.$$

Καλή επιτυχία!